Hinweise für Lehrende

Zusatzmaterial zum Buch Mathematisches Problemlösen und Beweisen

Daniel Grieser

Oktober 2012

Das Buch *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* soll nicht nur Lehrbuch sein, es möchte Sie als Lehrende an einer Schule oder Hochschule auch dazu ermutigen, dem selbständigen Entdecken von Mathematik in Ihren Lehrveranstaltungen viel Raum zu geben. Die folgenden Ausführungen können dabei nützlich sein. Zunächst sind einige grundsätzliche Überlegungen zusammengestellt, die dem Aufbau des Buches zugrundeliegen. Diese sollen als Hinweise dienen, worauf es sich zu achten lohnt, wenn Sie Ihre Lehrveranstaltung planen. Da die Form einer Lehrveranstaltung ihren Zielen angepasst sein sollte, finden Sie im zweiten Abschnitt einige Anmerkungen zur praktischen Durchführung. Zum Abschluss werden Argumente dafür genannt, dass problemlöseorientierte Kurse zu einem festen Bestandteil der mathematischen Ausbildung gemacht werden sollten.

1 Inhalt und Aufbau

Dem Aufbau des Buches liegen einige grundsätzliche Überlegungen zugrunde, wie Studierende[1] zu einem selbständigen Umgang mit Mathematik gelangen können. Wir unterscheiden drei Phasen:

1. **Entdecken:** In der ersten Phase machen die Studierenden die Erfahrung, dass sie Mathematik selbst entdecken können. Dies ist den meisten fremd, sie kennen Mathematik als Sammlung von Rezepten, deren Anwendung es zu erlernen gilt. Diese Phase öffnet den Geist für die Mathematik und schafft Selbstbewusstsein.

2. **Konsolidieren:** In der zweiten Phase lernen die Studierenden, ihre Lösungsideen zu präzisieren und genau zu formulieren, und erkennen den Wert von Beweisen und allgemeinen Formulierungen. Nachdem sie eine Gesetzmäßigkeit oder ein Muster entdeckt haben, brauchen sie einen Beweis, um sicher zu sein, dass sie allgemein gilt. Eine Erklärung anhand eines Beispiels mag dem Beweis vorangehen, reicht aber nicht aus, der Beweis muss allgemein formuliert sein.

[1] Viele der folgenden Ausführungen sind für Lehrveranstaltungen in Schule und Hochschule anwendbar. Für Lehrveranstaltungen in der Schule ist das Wort Studierende durch Schülerinnen und Schüler und das Wort Dozent durch Lehrer/in zu ersetzen.

3. **Strategien lernen:** In der dritten Phase lernen die Studierenden Strategien zum Problemlösen und Beweisen kennen und setzen sie gezielt ein.

Diese Phasen folgen nicht separat aufeinander, sondern werden zeitlich verzahnt durchlaufen. Zunächst steht die erste Phase im Vordergrund, sie wird jedoch schon bald durch die zweite und dritte Phase ergänzt. Mit der Zeit wird die Kombination von Entdecken, allgemeinem Formulieren und Beweisen unter (meist unbewusstem) Einsatz von Problemlöse- und Beweisstrategien selbstverständlich.

Im Rahmen einer Lehrveranstaltung ist es sehr wichtig, für das eigene Entdecken genug Zeit zu lassen[2]. Das Präzisieren und Formulieren von Lösungsideen bildet den Einstieg in die zweite Phase. Der Übergang zu allgemeinen Formulierungen und Argumenten fällt vielen Studierenden schwer. Hier hilft viel Übung, viel Hilfestellung und konstruktives Korrigieren der Hausaufgaben. Als Vorbilder sollte der Dozent den Studierenden sorgfältig aufgeschriebene Lösungen der Probleme, die in der Veranstaltung evtl. auf Umwegen gefunden wurden, zur Verfügung stellen.

Einen guten Einstieg in die anspruchsvollste dritte Phase bieten relativ transparente Lösungs- bzw. Argumentationsstrategien, z.B. Rekursion und Induktion. Neben das schematische Anwenden dieser Strategien[3] tritt von Anfang an das *gezielte Planen* ihres Einsatzes (eine Rekursion suchen, einen Induktionsbeweis planen). Allgemeine Problemlösestrategien, Logik und Beweise werden erst in der Mitte des Buches systematisch behandelt, wenn die Studierenden schon einige Erfahrungen gemacht haben. Dann können sie aus diesen systematischen Betrachtungen größeren Gewinn ziehen als wenn sie ganz am Anfang stünden, wo man sie bei rein logisch begründetem Aufbau erwarten könnte. Die in den letzten Kapiteln behandelten Beweismuster sind deutlich komplexer, z.B. erfordert der strategische Einsatz des Extremalprinzips, dass man die darin vorkommende indirekte Schlussweise gut verinnerlicht hat.

Dieser Aufbau hat sich für einen Einstieg in einen kreativen und selbstbestimmten Umgang mit Mathematik bewährt. Man kann ihn auf verschiedene Weisen mit Inhalten füllen, statt des hier gewählten Schwerpunkts auf Themen aus Kombinatorik und Zahlentheorie könnte man etwa der Geometrie mehr Raum geben oder mehr Probleme einschließen, die Rechnen mit Gleichungen und Ungleichungen erfordern.

Weitere wesentliche Elemente des Buchs sind:

- Allgemeine Problemlösestrategien werden explizit benannt und mit Beispielen illustriert. Das Lernen solcher Strategien wird von den Studierenden als erstrebenswertes Ziel angesehen, da es eine Grundkompetenz für Studium und Beruf bildet. Sie zu kennen stärkt das Vertrauen in die eigenen Fähigkeiten.

- Grundlegende wissenschaftliche Prinzipien (z.B. Extremal- und Invarianzprinzip) werden als Mittel zum Lösen leicht zugänglicher mathematischer Probleme ein-

[2] Diese Zeit fehlt meist in den traditionellen, auf Vermittlung von Theorien ausgerichteten Vorlesungen, doch auch hier lohnt es sich, immer wieder die Perspektive des Entdeckers, des Fragenden einzunehmen.

[3] Dies wird im Buch nur kurz behandelt, da die meisten Lehrbücher, z.B. zur Analysis, viele solche „Schema F“ Beispiele zur Induktion enthalten.

geführt (spezielle Problemlösestrategien). Auf diese Weise werden diese Prinzipien für die Studierenden lebendig, da sie mit ihrer Anwendung eigene Erfolge erleben können.

- Einige der behandelten Probleme stellen einen hohen Anspruch an die Kreativität. Solche Anforderungen an die Studierenden sind nur deshalb vertretbar, weil kein neuer abstrakter Stoff zu verarbeiten ist.
- Beweise werden als Mittel zum eigenen Erkenntnisgewinn eingeführt. Leider erleben viele Studierende Beweise als lästige Pflichtübung. Solange in Lehrveranstaltungen Beweise auf fertig formulierte Sätze folgen oder nur dem Herleiten scheinbar offensichtlicher Tatsachen aus Axiomen (die aus Sicht der Studierenden beliebig zusammengestellt erscheinen) dienen, werden wir dies nicht ändern. Nur wer sich ernsthaft mathematische Fragen gestellt hat, wer unsicher war, welche von mehreren möglichen Antworten die richtige ist, und dann diese Unsicherheit mit Hilfe eines Beweises aufgelöst hat, wird den wahren Wert von Beweisen zu schätzen wissen. Darauf aufbauend kann dann auch der Wert von Beweisen in einem systematischen Aufbau der Mathematik verstanden werden.

Einige Überlegungen zur Problemauswahl finden Sie am Ende das nächsten Abschnitts.

2 Durchführung einer Lehrveranstaltung

Wenn wir die Studierenden zu einem aktiven Umgang mit Mathematik hinführen wollen, sollten wir unsere Lehrveranstaltung so gestalten, dass sie ständig zur Mitarbeit aufgerufen sind. Am besten wird dies bei Gruppengrößen von maximal ca. 25 Teilnehmern gelingen, wie sie in der Schule üblich sind. Im Universitätsalltag haben wir es jedoch oft mit größeren Teilnehmerzahlen zu tun: Die Veranstaltung, aus der dieses Buch entstanden ist, hatte ca. 200 Teilnehmer. Im Folgenden werden einige praktische Aspekte ihrer Durchführung beschrieben. Daraus lassen sich auch Hinweise für andere Gruppengrößen und Veranstaltungsformen ableiten.

Die Veranstaltung *Mathematisches Problemlösen und Beweisen* wurde vom Autor konzipiert und im Wintersemester 2011/12 erstmalig durchgeführt. Sie gliedert sich in wöchentlich je eine 90-minütige Vorlesung (ca. 200 Studierende) und ein 90-minütiges Tutorium (ca. 15-20 Studierende unter Anleitung eines Tutors/einer Tutorin – dies sind fortgeschrittene Studierende). Sie richtet sich vornehmlich an Studierende des ersten Semesters in den Fach- und Lehramtsstudiengängen. Jedoch profitieren auch Studierende höherer Semester von dem methodischen Ansatz, den herausfordernden Problemen und der Diskussion übergreifender wissenschaftlicher Prinzipien.

Die Vorlesung: In weiten Teilen hat die Vorlesung die Form eines Dialogs zwischen Dozent und Studierenden. Der Dozent formuliert ein Problem und illustriert es kurz durch ein oder zwei Beispiele. Es werden keine fertigen Lösungen präsentiert, sondern Ideen gesammelt, verschiedene Zugänge versucht, Ziele analysiert usw. Dabei wird den Studierenden immer wieder Zeit zum Nachdenken gegeben, gerne auch im Gespräch mit den Nachbarn. Dadurch erleben die Studierenden, wie Mathematik entsteht, und sind intensiv am Geschehen beteiligt. Obwohl im Plenum nur wenige Studierende zu Wort kommen, können sich die anderen mit diesen identifizieren. Dies ist besser, als wenn alle Beiträge zur Lösung vom Dozenten kämen.

Die bei den Lösungsprozessen gewonnenen methodischen und inhaltlichen Erkenntnisse werden vom Dozenten explizit benannt, geordnet und dadurch für weitere Probleme nutzbar gemacht. Die gefundenen Lösungen werden, zusammen mit weiterführenden Bemerkungen, in einem wöchentlich erscheinenden Skript festgehalten.

Wenn man als Dozent gewohnt ist, theoriezentrierte Vorlesungen zu halten, mag man den Eindruck bekommen, wenig zu „schaffen". In der Tat – nach 90 Minuten waren oft gerade einmal zwei oder drei Probleme bearbeitet. Doch die Qualität, die man damit schafft, wiegt die scheinbar geringe Quantität auf.

Die Tutorien: Dort werden Probleme zunächst allein und dann in kleinen Gruppen (2-4 Studierende) erarbeitet und die Lösungsversuche dann im Tutorium besprochen. In der Kleingruppenarbeit haben die Studierenden Gelegenheit, ihre Ideen sprachlich zu formulieren, und lernen voneinander. Tutorien und Vorlesung sollten gut aufeinander abgestimmt sein, bei einer großen Veranstaltung mit mehreren Tutorien sollte der Dozent Probleme für die Tutorien vorgeben. Die Tutoren haben eine sehr wichtige Funktion und sollten darin angeleitet werden, Hilfe zur Selbsthilfe zu geben. Bei erstmaliger Durchführung der Veranstaltung ergibt sich das Problem, geeignete Tutoren zu finden. Jedoch löst sich dieses von alleine, wenn es gelingt, durch frühzeitige Information klar zu machen, dass die Veranstaltung auch für die Tutoren einen großen Gewinn bedeutet.

Zur Problemauswahl: Es ist sehr wichtig, mit einfachen Problemen anzufangen, immer wieder, sowohl in Vorlesung und Tutorien als auch bei den Hausaufgaben. Grundideen versteht man am besten in einfachem Kontext. Die Aufgaben sollten attraktiv sein, zum eigenen Entdecken einladen und an die Vorkenntnisse und Interessen der Teilnehmer anknüpfen. Weitere Kriterien für die Themen- und Problemauswahl sind die Relevanz für das weitere Studium, mathematische Allgemeinbildung (z.B. Fibonacci-Zahlen, Euler-Formel) und Kohärenz (wenn eine Idee in verschiedenen Formen mehrfach auftritt, prägt sie sich besser ein).

Alle Aufgaben (in Vorlesung, Tutorium und für zu hause) sollten möglichst offen formuliert sein, da sie dann mehr zum eigenen Nachdenken anregen (z.B. „Stimmt es, dass..." statt „Beweisen Sie..."; dies nimmt dem Beweisen auch den Ruch der Pflichtübung – ich beweise, weil der Lehrer es verlangt – und setzt es in den angemessenen Kontext: ich beweise, weil ich sicher sein will, dass meine Behauptung stimmt). Für die Hausaufgaben sind neben dem Finden von Lösungen bzw. Beweisen andere Aufgabentypen denkbar, z.B.: in den Tutorien erarbeitete Lösungen geordnet aufschreiben (Üben des Formulierens) oder Lücken in Argumentationen finden (Sinn für Logik schärfen, siehe z.B. einige der Aufgaben zu Kapitel 7).

3 Warum Mathematisches Problemlösen und Beweisen?

Überlegungen, eine neue Lehrveranstaltung ins Curriculum aufzunehmen, stoßen meist auf Widerstände: Bisher lief doch alles gut, man muss an anderer Stelle kürzen usw. Hier sind einige Argumente, die dafür sprechen, dem Thema Problemlösen – das in natürlicher Weise das Thema Beweisen einschließt – einen eigenen Ort zu geben. Die ersten fünf Argumente sind auf Schule und Hochschule anwendbar, die letzten beiden sind spezifisch für den Hochschulkontext. Im Hochschulkontext sollte eine solche Veranstaltung am besten am Studienbeginn liegen.

- *Problemlösen erzieht zu selbständigem Denken.* Das Lernen von Fakten und „Rezepten“ nimmt in der Lehre viel Raum ein. Problemlösen fordert die Studierenden stärker heraus, sich aktiv und kritisch mit Mathematik zu befassen.

- *Problemlösen ist ein Kernelement der Mathematik.* Ein Großteil der Mathematik ist aus dem Bedürfnis entstanden, Probleme zu lösen. Daher lässt sich Mathematik nur verstehen, wenn man sie auch aus der Sicht des Problemlösers betrachtet.

- *Mathematischen Methoden einen eigenen Ort geben.* Die meisten mathematischen Lehrveranstaltungen sind thematisch orientiert. Methoden, wie man sich mathematischen Fragen nähert, werden dabei meist nicht explizit thematisiert. Es wird angenommen, dass Studierende diese, soweit nötig, mit der Zeit von alleine lernen werden. Indem Methoden einen eigenen Platz bekommen, erfahren sie die Wertschätzung, die sie verdienen.

- *Mathematik wird als lebendige Wissenschaft dargestellt, nicht als statisches Gebäude.* Die Studierenden erfahren, dass sie selbst mathematisch kreativ sein können. Sie erfahren „im Kleinen“, was wissenschaftliches Arbeiten ist.

- *Einen fruchtbaren Boden für mathematische Theorien schaffen.* Wer sich nie eine Frage gestellt hat, wird die Antwort nicht zu schätzen wissen. Indem Studierende sich daran gewöhnen, sich mathematische Fragen zu stellen und sie zu untersuchen, werden sie neugierig auf die wunderbaren mathematischen Theorien, die sie in anderen Veranstaltungen kennen lernen. Dadurch werden diese Veranstaltungen aufgewertet.

- *Studienanfänger da abholen, wo sie stehen.* Beim traditionellen Aufbau des Mathematikstudiums wird von Anfang an das Gebäude der Mathematik systematisch aufgebaut. Viele Studienanfänger sind hierfür nicht ausreichend vorbereitet, siehe z.B. die Ausführungen auf Seite 3 zu Beweisen. Daher wird der Übergang von der Schule zur Hochschule oft als Bruch empfunden und nicht nachvollzogen. Indem bekannte Inhalte aus neuer Perspektive bearbeitet werden, wird der Übergang sinnvoll gestaltet. Damit kann auch die Begeisterung für Mathematik, die die meisten Studienanfänger mitbringen, erhalten werden.

- *Das Thema Problemlösen in der Fachausbildung von Lehramtsstudenten ernst nehmen.* Problemlösen gehört seit einigen Jahren zum Kerncurriculum des Mathematikunterrichts an Gymnasien. Die Lehrerausbildung trägt dem bisher nicht ausreichend Rechnung. Meist wird Problemlösen, wenn überhaupt, ausschließlich in Veranstaltungen zur Didaktik thematisiert, und nicht in der Fach-Ausbildung, wo es hingehört.

Wenn Sie an einem Austausch über Ihre Erfahrungen mit Lehrveranstaltungen der hier beschriebenen Art interessiert sind, schreiben Sie mir bitte unter `daniel.grieser@uni-oldenburg.de`.

http://www.springer.com/978-3-658-14764-8

Mathematisches Problemlösen und Beweisen
Eine Entdeckungsreise in die Mathematik
Grieser, D.
2017, XIII, 321 S. 70 Abb., 14 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-658-14764-8